



АНАЛІТИЧНА ФУНКЦІЯ — функція, що визначена в деякій області і в околі кожної її точки розкладається в збіжний степеневий ряд. Нехай в області D комплекс. площини C задана (однозначна) функція $f: D \rightarrow C$. Ця функція називається аналітичною в точці $a \in D$, якщо в деякому околі цієї точки вона зображається у вигляді: $f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$ з коефіцієнтами $c_0, c_1, \dots$, що не залежать від z . Функція f називається аналітичною в D , якщо вона аналітична в кожній точці області D . Функція f називається диференційовною (в комплекс. сенсі) в точці $a \in D$, якщо існує скінчена границя $\lim_{z \rightarrow a} (f(z) - f(a)) / (z - a)$, яка позначається через $f'(a)$ і називається похідною функції f в точці a . Функція f називається диференційовною в D , якщо вона диференційовна в кожній точці області D . Функція аналітична в області D тоді і тільки тоді, коли вона диференційовна в D . Аналітичну в області функцію називають також голоморфною, або регулярною, а термін «А. ф.», на відміну від двох наведених термінів, використовують також у більш заг. сенсах. Значення теорії А. ф. визначається тим, що більшість функцій, які вивчають у математиці і використовують у фізиці та ін. науках, є аналітичними. Це стосується таких функцій, як поліноміальні, раціональні, тригонометричні, експоненціальні, гіперболічні, еліптичні, а також функції, обернені згаданим (з необхід. уточненням умов і термінології), і багато ін. класів функцій у відповід. областях. А. ф. мають низку важл. властивостей. Похідна А. ф. є аналіт. функцією. Тому аналітична в D функція має похідні $f', \dots, f^{(n)}, \dots$ усіх натурал. порядків і в околі кожної точки $a \in D$ зображається рядом:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a)/1! + \dots + f^{(n)}(a)(z-a)^n/n! + \dots,$$

який називається рядом Тейлора функції f в точці a . Комплексну площину C можна ототожнювати з евклідовою площиною R^2 і розглядати область D в R^2 . Нехай $z = x + iy$,

$$f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y),$$

де $i = \sqrt{-1}$ є уявна одиниця, а u, v — дійсні функції дійсних змінних x, y в області $D \in R^2$. Якщо функції u, v диференційовні в дійсному розумінні в D , то для аналітичності f у D необхідно і достатньо, щоб у D виконувалась сукупність умов:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

яка називається рівняннями Коші-Рімана (або Д'Аламбера-Ейлера). Функції u, v є гармоніч. функціями. Якщо в наведених вище означеннях А. ф. комплекс. змінної z прийняти, що D є область на дійсній осі R^1 , тобто відкритий інтервал I , то ми отримуємо означення А. ф. дійсної змінної (в точці й у відкритому інтервалі). Цей інтервал I можна розглядати на дійсній осі в C , і кожна аналітична в I функція дійсної змінної виявляється

слідом на I деякої (притому єдиної) А. ф. комплекс. змінної, визначеної в двовимір. околі інтервалу I . Нехай Γ є замкнена спрямлювана жорданова крива, яка разом із охоплюваною нею обмеженою областю G міститься в D . Тоді для кожної точки $a \in G$ правильними є співвідношення

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz / (z-a) = 2\pi i f(a),$$

перше з яких називається інтегральною теоремою Коші, а друге — інтегральною формулою Коші. Інтеграл. теорема Коші має обернення, яке називається теоремою Морери. Для А. ф. правильними є теореми єдиності (які стверджують, що певні умови визначають тільки одну А. ф.) і принцип максимуму модуля (якщо А. ф. не є сталою, то верхня границя значень її модуля в області не може досягатись у жодній точці цієї області). У 20 ст. побудовано також теорію голоморфних функцій кількох комплекс. змінних, яка відіграє значну роль у математиці та її застосуваннях. Теорія А. ф. є центр. частиною теорії функції однієї і багатьох комплекс. змінних, яка в останні роки дедалі частіше позначається місткішим і енергійнішим терміном «комплексний аналіз». Основи теорії А. ф. комплекс. змінної заклали в 19 ст. О. Коші, Б. Ріман, К. Вайєрштрасс.

Рекомендована література

1. Соколов Ю. Д. Елементи теорії функцій комплексної змінної. К., 1954;
2. R. P. Boas, R. C. Buck. Polynomial expansions of analytic functions. Berlin, 1958;
3. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-е изд. Москва, 1966;
4. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. 2-е изд. Т. 1-2. Москва, 1967-68;
5. J. M. Anderson. Muntz Szasz approximation and the angular growth of lacunary integral functions // Transactions of the American Mathematical Society. 1972. Vol. 69, № 7;
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. 4-е изд. Москва, 1973;
7. Ибрагимов И. И. Избранные вопросы теории аналитических функций. Баку, 1984;
8. Трохимчук Ю. Ю. Устранимые особенности аналитических функций. К., 1992;
9. Скасків О. Б. О росте в полуполосах аналитических функций, представленных рядами Дирихле // УМЖ. 1993. Т. 45, № 5;
10. Винницкий Б. В. О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // Там

Бібліографічний опис:

Аналітична функція / П. М. Тамразов // Енциклопедія Сучасної України [Електронний ресурс] / Редкол.: І. М. Дзюба, А. І. Жуковський, М. Г. Железняк [та ін.] ; НАН України, НТШ. — К. : Інститут енциклопедичних досліджень НАН України, 2001. — Режим доступу: <https://esu.com.ua/article-44040>

2001-2025 © Ця енциклопедична стаття захищена авторським правом згідно з чинним законодавством України ([докладніше](#)).