

МЕРОМОРФНА ФУНКЦІЯ (від грец. μέρος — дріб і ὅλος — вид) — у комплексному аналізі голоморфна функція, визначена на відкритій підмножині D комплексної площини $\mathbb{C}$ за винятком ізольованої підмножини точок (полюсів цієї функції). В околі кожного з полюсів M . ф. має розклад у ряд Лорана. Будь-яку M . ф. на множині D можна задати як частку між двома голоморф. функціями (зі знаменником, що не дорівнює нулю), визначених на D ; кожен полюс повинен співпадати з нулем знаменника. Отже, M . ф. — це відношення двох голоморф. функцій. Така функція буде голоморфною, окрім точок, де знаменник дробу перетворюється на нуль, а значення функції прямує до нескінченності. В алгебрич. сенсі сукупність всіх M . ф. $M(D)$ в області D — це поле часток кільця голоморф. функцій на D відносно звичай. поточк. операцій з наступ. доозначенням функцій у множині усунених особливостей. Аналогічно встановлюють залежність між множиною рац. і цілих чисел. Кожна M . ф. $f \in M(D)$ задає неперервне відображення f області D у сферу Рімана $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (одновимір. комплекс. проектив. простір), що є голоморф. відображенням відносно комплекс. структури. Вірне й обернене твердження: кожне голоморфне відображення $f: D \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ задає M . ф. f на D . При цьому множина полюсів f співпадає з дискрет. множиною $f^{-1}(\infty)$. Таким чином, M . ф. однієї комплекс. змінної можна ототожнити з голоморф. відображеннями в сферу Рімана. Осн. задачі теорії M . ф. — це питання існування та побудови M . ф. із заданими особливостями. Значне місце в цій теорії посідає теорія розподілу значень (теорія Неванліни), що вивчає розподіл коренів рівняння $f(z) = a$, $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ при підході до межі області. Оскільки полюси M . ф. ізольовані, то їх не може бути більше зліченної множини. Але множина полюсів може бути нескінченною

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

У випадку багатьох комплекс. змінних M . ф. задають локально як частку двох голоморф. функцій. Напр., $f(z_1, z_2) = z_1 / z_2 \in M$. ф. на двовимір. комплекс. просторі. У багатовимір. випадку кожен M . ф. не можна розглядати як голоморфну функцію зі значеннями в сфері Рімана.

Такі рац. функції, як

$$f(z) = \frac{z^3 - 2z + 7}{z^5 + 3z^2 - 5},$$

а також функції

$$f(z) = \frac{e^z}{z}, \quad f(z) = \operatorname{tg} z, \quad f(z) = \frac{\cos z}{(z-1)^3}$$

є мероморфними в усій комплекс. площині. Функція $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ задана на усій комплекс. площині за винятком початку координат $z = 0$. Але 0 не є полюсом цієї функції, а її особливою точкою. Отже, ця функція не є мероморфною в усій комплекс. площині. Але вона є мероморфною (навіть голоморфною) в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Серед важливих M . ф. — гамма функція та дзета функція Рімана. Немероморфні функції: усі нерац. функції, напр. $f(z) = \sqrt{z}$; усі функції, що мають логарифмічне розгалуження, напр., $f(z) = \ln(z)$. На Ріманових поверхнях кожна точка має відкритий окіл, що гомеоморфний відкритій множині комплекс. площини. Отже, поняття M . ф. може бути визначене для кожної Ріманової поверхні. На некомпакт. Рімановій поверхні кожна M . ф. може бути реалізована як частка двох (заданих глобально) голоморф. функцій. На компакт. Ріманових поверхнях кожне значення M . ф. приймають з однією частотою, а число нулів такої функції співпадає з числом її полюсів. M . ф. на еліптич. кривих називають еліптич. функціями. Осн. твердженнями в теорії M . ф. є теореми Вайєрштрасса, Міттаг-Лефлера, про лишки та Рімана-Роха.

Рекомендована література

1. H. Zassen. Lehrbuch der Gruppen-theorie. Leipzig; Berlin, 1937;
2. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций: В 2 т. Москва, 1967-68;
3. Евграфов М. А. Аналитические функции. Москва, 1968;
4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ: В 2 т. Москва, 1976;
5. S. Lang. Complex analysis. Berlin; New York, 1999.

Ю. Б. Зелінський

Бібліографічний опис:

Мероморфна функція / Ю. Б. Зелінський // Енциклопедія Сучасної України [Електронний ресурс] / Редкол.: І. М. Дзюба, А. І. Жуковський, М. Г. Железняк [та ін.] ; НАН України, НТШ. — К. : Інститут енциклопедичних досліджень НАН України, 2018. — Режим доступу: <https://esu.com.ua/article-67459>

2001-2025 © Ця енциклопедична стаття захищена авторським правом згідно з чинним законодавством України ([докладніше](#)).